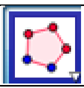
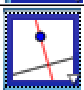
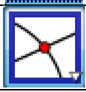
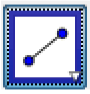
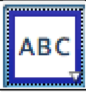
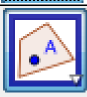
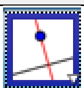
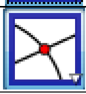
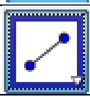
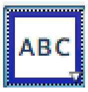
Un paseo por Geogebra

A).- Textos dinámicos[1]

Por **Textos dinámicos** en Geogebra, entendemos números y operaciones que se modifican, que cambian atendiendo a las diferentes operaciones que realizamos con ellos. Es muy importante el concepto porque permite múltiples combinaciones.

Actividad 1: Demostrar el **Teorema de Viviani**: dicho teorema enuncia que *"la suma de las distancias desde un punto a cada uno de los lados de un triángulo equilátero es igual a la altura del triángulo"*.

Construcción paso a paso: En una Ventana nueva, tenemos abierta la Vista algebraica y la Vista gráfica

1		Dibujamos un triángulo equilátero ABC . Marca dos puntos y vértices 3
2		Recta **d** perpendicular a **AB** pasando por C. Es la altura del triángulo desde el vértice C
3		Para obtener el punto de corte de la recta d con el segmento AB
4		Dibujamos el segmento entre los puntos C y D y ocultamos la recta. Cambiamos un poco la apariencia del segmento en el menú de Propiedades
5		Pinchamos en la Vista gráfica. En la ventana Edita escribe *Altura* y seleccionas el segmento. Modifica sus propiedades: un poco más "gordo"
6		Con la herramienta Punto en objeto creamos un punto E dentro del triángulo.
7		Creamos las rectas f, g y h desde el punto E a cada uno de los tres lados del triángulo.
8		Puntos de intersección de estas rectas y los lados del triángulo.
9		Ocultamos las rectas y dibujamos los segmentos correspondientes i, j, k. Cambiamos un poco sus propiedades.
10		Escribe Suma = y seleccionamos el segmento i + y el segmento j + y el segmento k Suma = i + j + k Seguimos en la misma línea y escribimos = y seleccionamos otra vez el segmento i. Ahora, dentro de la misma casilla, escribimos + j + k Suma = i + j + k = i+j+k . Pulsamos ok

[1] Apuntes tomados del curso Thales: "Geogebra avanza". 2013

B).- Lugares geométricos:

Para construir un lugar geométrico necesitamos dos elementos: un punto que será el que describa el lugar geométrico, y otro punto que será el que se mueva y hace que las condiciones cambien. El objeto que se mueve debe moverse sobre otro del que dependerá

Actividad 2: *Dibujar una **parábola** como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta llamada Directriz y de un punto exterior a ella llamado Foco*.

1		Con los ejes activados dibujar una recta paralela al eje x por un punto cualquiera de y, por ejemplo -2. Ocultar los ejes y el punto A obtenido. Renombrar la recta pinchando sobre ella con el botón derecho y llamarla Directriz
2		Marcar un punto B sobre la recta y otro C exterior a la misma.
3		Unir ambos puntos con la herramienta segmento
4		Marcar el punto medio del segmento
5		Trazar la recta perpendicular al segmento por este punto medio.
6		Trazar la recta perpendicular desde el punto B a la Directriz
7		Marcar el punto de intersección de las dos perpendiculares. Este será el punto que marcará el lugar geométrico.
8		Con la herramienta seleccionada pinchamos primero en el punto intersección obtenido y después en la directriz.

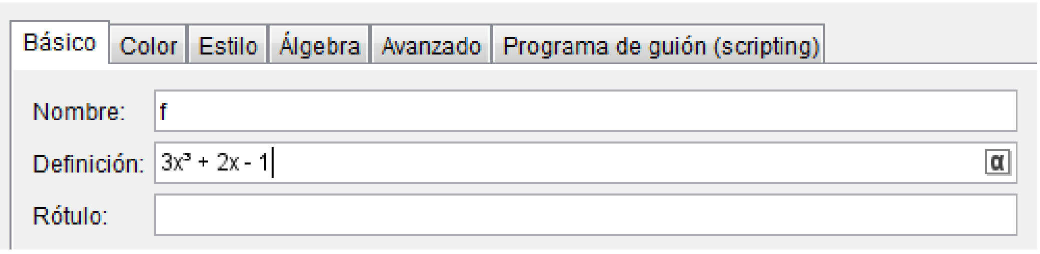
Otros ejemplos pueden ser obtener la hipérbola y la elipse como lugares geométricos.

Actividad 3: a veces es más útil realizar el lugar geométrico a partir del rastro que se obtiene al mover un objeto. Por ejemplo, *dibujar **una circunferencia** como el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto llamado centro.*

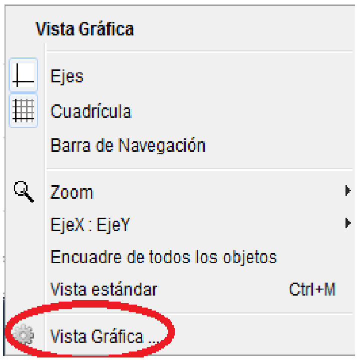
1	Entrada: (0,0)	Desde el Campo de Entrada introducimos el punto (0,0)
2		Con la herramienta segmento con una longitud dada construimos un segmento desde el punto A de longitud 5
3	Desde la **Vista algebraica** vemos que tenemos los dos puntos A y B y el segmento a	
4	Rastro activado	Con el botón derecho del ratón sobre el punto B abrimos el menú contextual y pinchamos en Rastro activado
5	Animación activada	Y en Animación activada que está justo debajo.
6	Observar que al activar la animación aparece justo en la esquina inferior izquierda el botón . Al pinchar en él se para la animación y el botón se cambia a	

C).- Funciones

Actividad 4: representar funciones con Geogebra es muy sencillo, basta con escribirlas en la barra de entradas, por ejemplo: Entrada: **y=x^3+2x-1** Para modificar sus propiedades o alguna característica pinchamos sobre ella con el botón derecho del ratón y se despliega el menú contextual. Representar la función anterior, cambiar el color, el grosor y después modificar la función, por ejemplo:

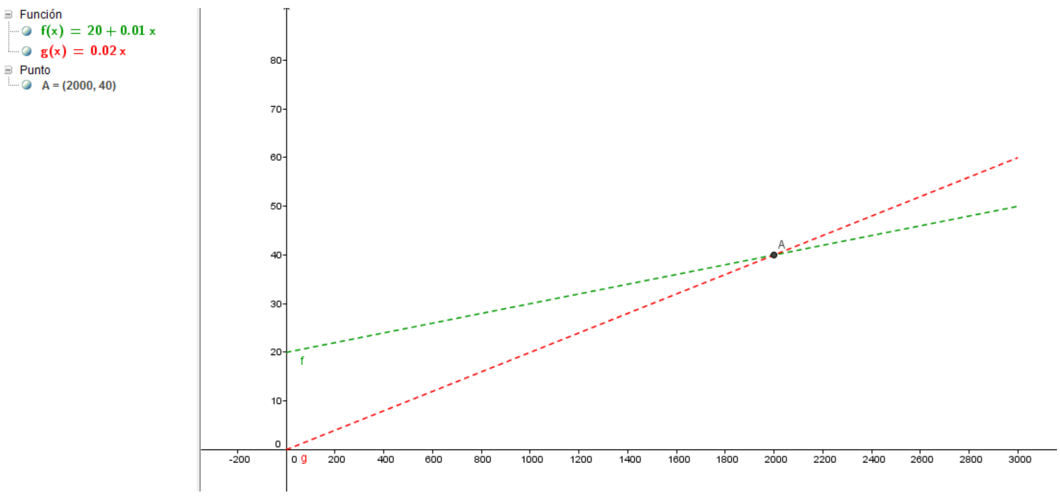


Actividad 5: si queremos **representar una función en un intervalo**, sólo hay que indicarlo desde la entrada escribiendo el siguiente comando **Función[F(x), valor inicial, valor final]**, por ejemplo, resolvemos el siguiente problema: *un servidor de Internet tiene una tarifa que consiste en una tarifa fija mensual de 20 € y 0,01 €por cada minuto. Otro servidor tiene una tarifa sin cuota fija y sólo hay que pagar 0,02 € por minuto. Representa las dos funciones en una misma gráfica. ¿Con cuántos minutos de uso pagaremos lo mismo con las dos tarifas?.*



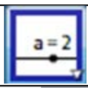
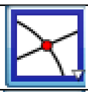
Función[20 + 0.01 x, 0, 3000] y **Función[0.02 x, 0, 3000]**. Como los valores de los ejes no son los adecuados, siempre los podemos modificar pinchando con el botón derecho sobre la ventana gráfica y seleccionamos **Vista gráfica** como en la imagen y utilizamos el Zoom.

Después buscamos el punto de intersección de ambas funciones



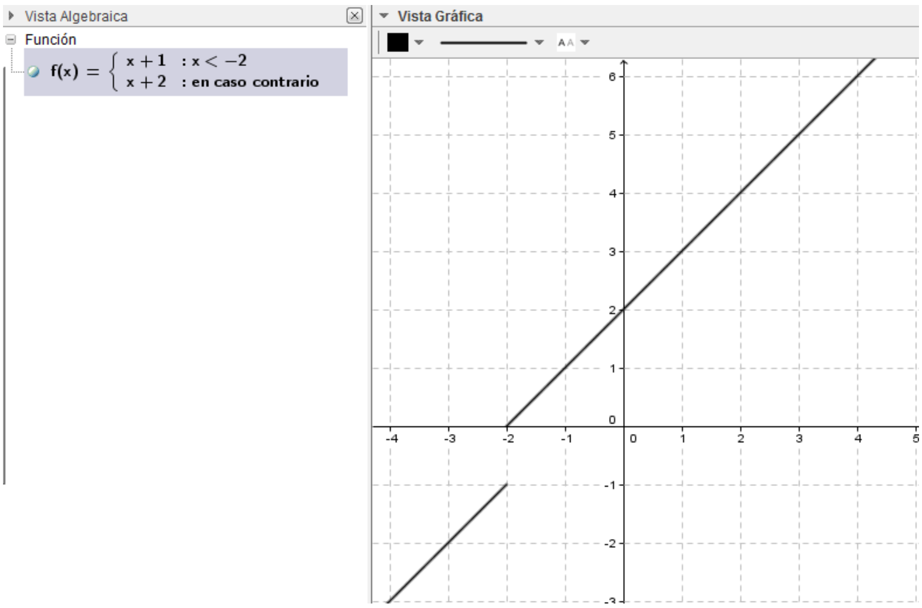
Actividad 6: Combinando los deslizadores y las funciones podemos obtener el **estudio de las funciones cuadráticas y lineales**.

Construcción paso a paso: En una Ventana nueva, tendremos abierta la Vista algebraica y la Vista gráfica. En la Vista gráfica activamos la cuadrícula para fijar los deslizadores.

1		Creamos tres deslizadores a, b y c con incremento 0.5. Les colocamos ordenados uno debajo del otro y los fijamos.
2	Entrada:	En la entrada escribimos y = a x^2 + b x + c
3	Movemos alternativamente los deslizadores y observamos que cuando a = 0, la gráfica es una función lineal. Cuando a = 0 y c = 0 la función es proporcional.	
4		Obtenemos los puntos de intersección de la función con los ejes X e Y. Se pueden ver sus coordenadas en la Vista algebraica.
5		Pondremos unas casillas de control para que nos indique cuando la sunción es cuadrática, de proporcionalidad o afín. (en el aula).

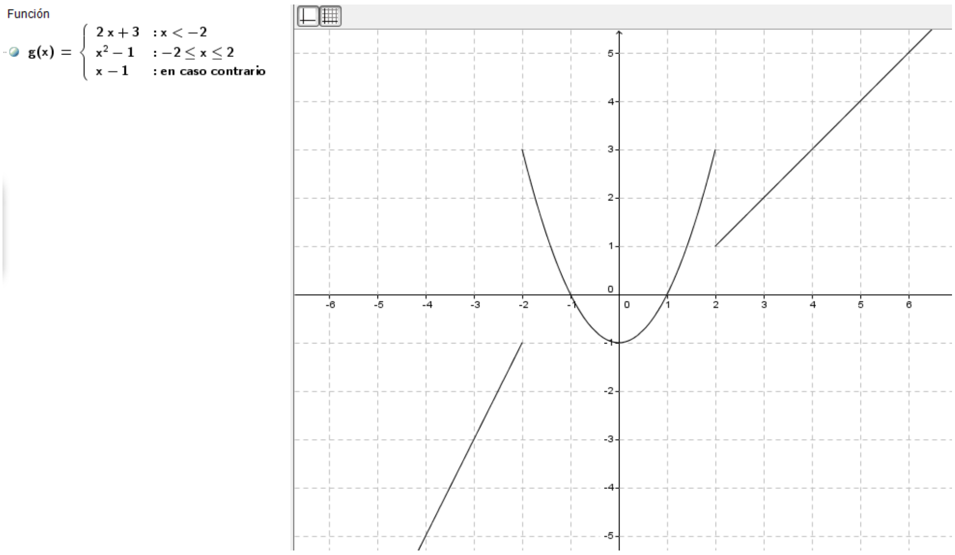
Actividad 7: **Funciones definidas por intervalos**. Utilizamos el comando condicional **Si[condición, entonces, si no]**, por ejemplo, escribimos en el campo de entrada

Si[x<-2, x+1, x+2] obtenemos lo siguiente:

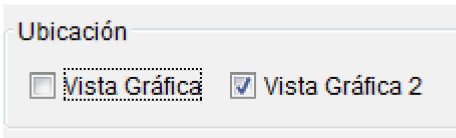


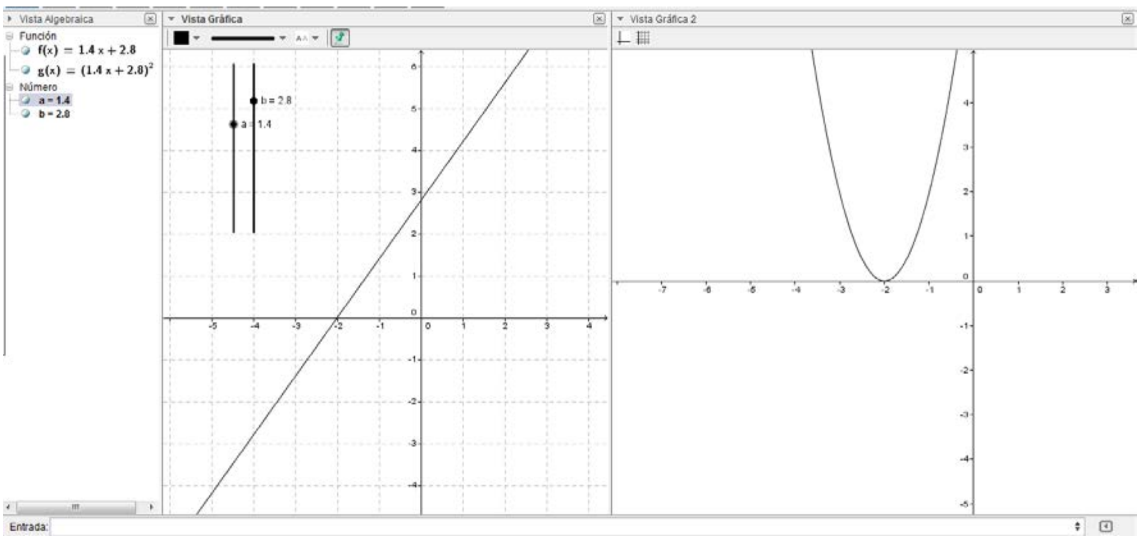
Cuando existen más de dos intervalos hay que anidar las diferentes condiciones, por ejemplo: si queremos representar la función $y = \begin{cases} 2x+3 \;\; si\; x < -2 \\ x^2 - 1 \;\; si -2 < x \leq 2 \\ x - 1 \;\; si \;\; x > 2 \end{cases}$ escribimos:

Si[x<-2,2x+3,Si[x<=2,x^2-1,x-1]] dando como resultado:



Actividad 8: Geogebra permite estudiar la composición de funciones. Abre una segunda Ventana gráfica. En la primera creamos dos deslizadores a y b y representamos desde la barra de entrada la función $f(x) = ax + b$. Desde la barra de entrada escribimos $f(x)^2$. Pinchamos sobre ella con el botón derecho, **Propiedades, Avanzado, Ubicación**, pinchamos en **Vista gráfica 2**.



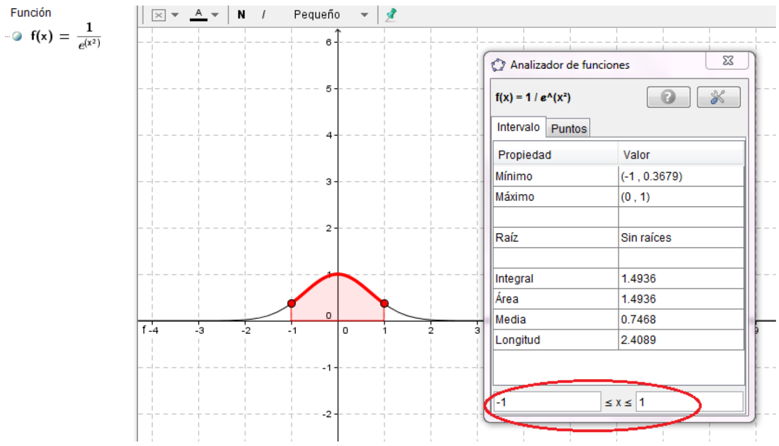


Actividad 9: **Estudio de una función**. Para determinar los puntos característicos de una función tenemos algunos comandos que nos pueden ayudar como:

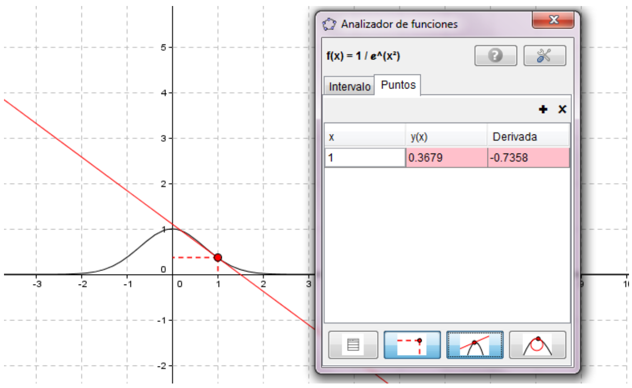
Comando	Definición	Ejemplo
Raíz[p(x)]	Halla las raíces de funciones polinómicas	$y = x^3 + x^2 + x + 1$ $y = 3x^5 - 20x^3$ (zoom 1:10)
Raíz[f(x),x$_0$]	Halla las raíces de una función tomando un valor inicial	$y = \frac{x^3}{1-x^2}$ con x_1=-1
Raíz[f(x),x$_0$,x$_1$]	Halla las raíces de una función en un intervalo determinado	$y = \frac{x^3}{1-x^2}$ en [-1, 1]

Extremo	Halla los máximos y los mínimos de f(x).	$y = \frac{x^3}{1-x^2}$
Extremo[f(x),x_0,x_1]	Lo mismo pero en un intervalo.	$y = \frac{x^3}{1-x^2}$ en [-3, 3]
PuntoInflexión[p(x)]	$y = 3x^5 - 20x^3$	Halla los puntos de inflexión en **sólo en funciones polinómicas.**

Actividad 10: También tenemos la herramienta Analizador de funciones disponible en el menú del texto. Por ejemplo, si escribimos la función $y = \frac{1}{e^{x^2}}$ obtenemos:



Si pinchamos en **Puntos** vemos que aparece un **+**, donde podemos obtener los valores de la derivada y de la derivada segunda, por ejemplo, calcular los valores de la 1ª y de la 2ª derivada para x = 1:



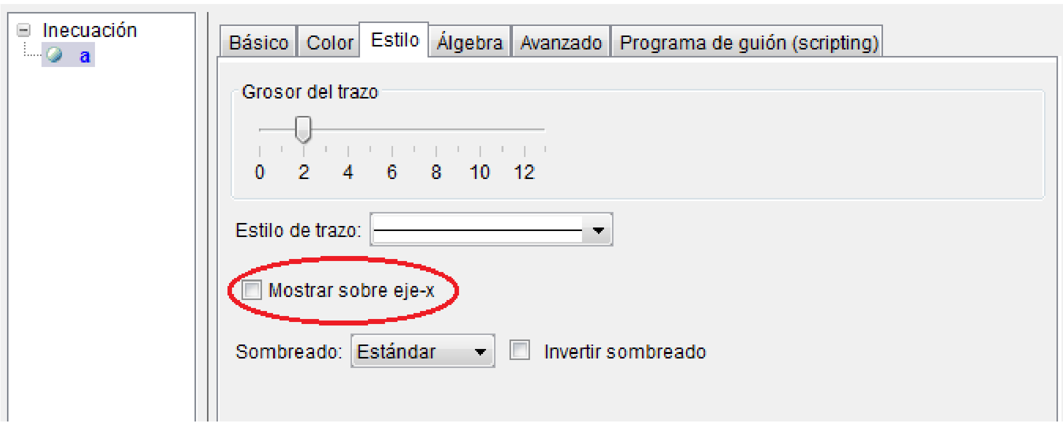
Actividad 11: Otros comandos interesantes son:

Comando	Definición	Ejemplo
Derivada[f(x)]	Nos da la derivada de una función y la representa	$f(x) = \frac{x^3}{x^2-2}$
Derivada[f(x),n]	Permite hallar la derivada de orden n	$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
Integral[f(x)]	Nos da la integral de f(x) y la representa.	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Integral[f(x),a,b]	Calcula la integral definida en un intervalo [a, b]	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ entre [-2, 2]
SumaInferior[f(x), a, b, n]	Nos da la suma inferior del área entre a y b con n intervalos	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ entre [-2, 2] con n=10
SumaSuperior[f(x), a, b, n]	Nos da la suma superior	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ entre [-2, 2] con n=10

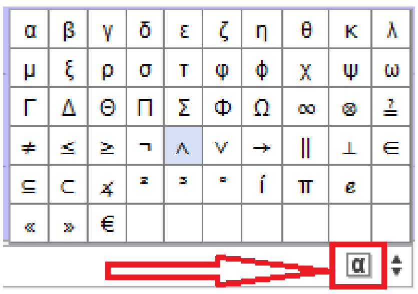
D).- Programación lineal:

Para representar las soluciones de una inecuación en el plano basta con escribirla en el campo de entrada, por ejemplo: Entrada: **2x>6**. Si lo que queremos es el intervalo de valores de x, pulsamos con el botón derecho sobre el área gráfica y pinchamos sobre **Mostrar sobre el eje x.**



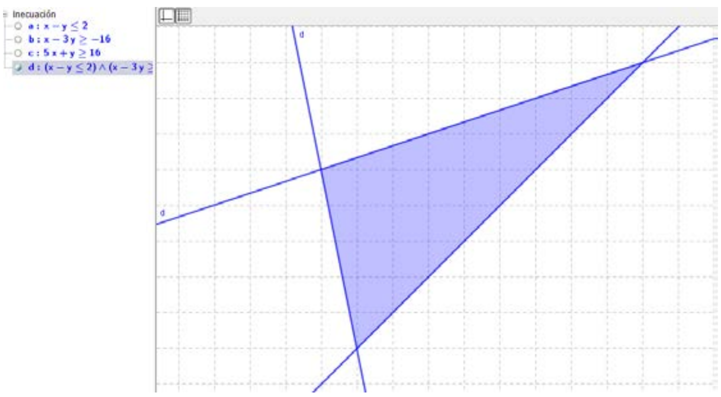
Actividad 12: Representar en el mismo archivo las inecuaciones $x - y \geq 2; x + 5y > 10$

1	Entrada: **x-y>=2** y	Pinchar en Intro
2	Entrada: **x+5y>10**	Pinchar en Intro
3	Entrada: a∧b	Se obtiene el conjunto solución correspondiente. Para comprobarlo ocultar las inecuaciones a y b



Actividad 13: Representar el recinto formado por todos los puntos que cumplen las tres condiciones siguientes:

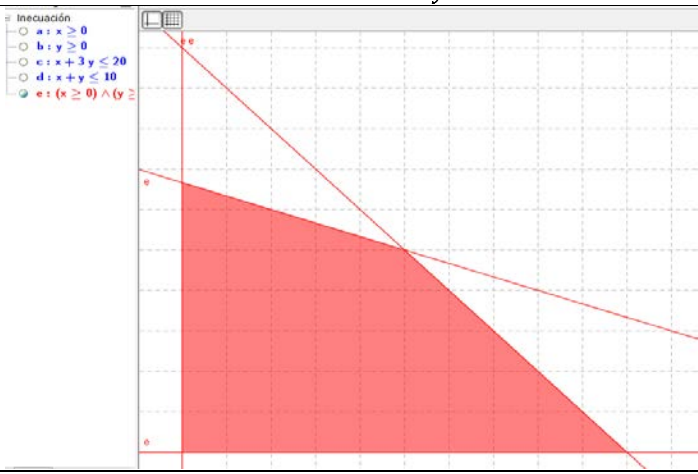
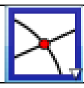
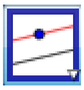
$$\begin{cases} x - y \leq 2 \\ x - 3y \geq -16 \\ 5x + y \geq 16 \end{cases}$$



<u>Actividad 14</u>: Las 20 chicas y los 10 chicos de un curso de 2º de Bachillerato organizan un viaje para lo cual necesitan dinero. Deciden pedir trabajo por las tardes en una compañía encuestadora que contrata dos tipos de equipos de jóvenes:

Tipo A: Parejas de un chico y una chica. Tipo B: Parejas de 3 chicas y un chico.

Se paga a 30 € la tarde al equipo tipo A y 50 € la tarde al tipo B. ¿Cómo les conviene distribuirse para conseguir la mayor cantidad de dinero?.

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Hallar las restricciones: $\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 3y \leq 20 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$ y representarlas</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Para poder hallar los vértices de la región factible, debemos pintar las rectas de las desigualdades, es decir x = 0; y = 0; x+3y = 20; x+y = 10.</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>Hallar la intersección de las rectas dos a dos</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Entrada: 3x+5y=0</td><td>Representar la función objetivo que hay que maximizar:
G(x,y) = 3x+5y</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td>Trazamos rectas paralelas a esta función objetivo por cada uno de los vértices. Vemos que la solución buscada es el punto B (5,5)</td></tr>
<tr><td colspan="3">
</td></tr>
</table>